Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Sarah Hess
Moritz Schick
Wintersemester 2023/24

Übungen zur Vorlesung *Lineare Algebra I*

Dualbasen und Determinante

Dieses Blatt dient **nicht zur Abgabe**, jedoch zum Üben von klausurrelevantem Stoff

Aufgabe 1.1
Gegeben seien die folgenden linear unabhängigen Vektoren aus $\mathbb{R}^{3\times 1}$:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Dualbasis zu (u_1, u_2, u_3), d.h., die linearen Abbildungen $f_i \in (\mathbb{R}^{3\times 1})^*$ mit $f_i(u_j) = \delta_{ij}$ $(i = 1, 2, 3)$.

Aufgabe 1.2
Seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ eine obere Dreiecksmatrix. Sei $U_{ij} \in \mathrm{Mat}_{n-1\times n-1}(K)$ die Matrix, die aus A durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht. Zeigen Sie, dass U_{ij} für $i < j$ eine obere Dreiecksmatrix ist und mindestens ein Diagonaleintrag gleich 0 ist. Folgern Sie, dass $\det(U_{ij}) = 0$ für $i < j$.

Aufgabe 1.3
Sei K ein Körper und sei $A \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(K)$. Sei $B \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(K)$ eine Matrix, die aus A durch eine elementare Zeilenumformung von Typ 1 hervorgeht, und entsprechend $C, D \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(K)$ für Typ 2, bzw. Typ 3. Zeigen Sie:

(a) $\det B = -\det(A)$
(b) $\det C = \lambda \det(A)$, wobei λ den Skalar bezeichnet, mit dem wir eine Zeile von A multipliziert haben.
(c) $\det D = \det(A)$